(2) $b \leq c$ $\quad f_1 : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f_2 : (c,d) \to \mathbb{R}$ son crecientes

$$f(x) = \begin{cases} (\exp \circ f_1)(x) & x \in (a,b) \\ f_2(x) & x \in (c,d) \end{cases} \qquad e^{f_1(x)}$$

Demostrar: ($\Leftrightarrow$) f es monotona $\Leftrightarrow$ $\forall z_1, z_2$ / $z_1 \in \exp(\operatorname{Ran} f_1)$, $z_2 \in \operatorname{Ran}(f_2)$, $z_1 \leq z_2$

Sol

$\Rightarrow$)

$(\exp \circ f_1)(x)$ es creciente y f_2 es creciente, f es creciente en todo su dominio

Sea $z_1 \in (\exp(\operatorname{Ran} f_1(x)))$, $z_2 \in \operatorname{Ran} f_2(x)$

$z_1 = (\exp \circ f_1)(x_1)$, $z_2 = f_2(x_2)$ $\qquad x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (c,d)$

$x_1 < x_2$ como f es creciente

$z_1 = (\exp \circ f_1)(x_1)$ ademas $f(x_1) \leq f(x_2) = z_2$ $\qquad f(x_1) = (\exp \circ f_1)(x) = z_1$

$z_1 = (\exp \circ f_1)(x_1) = f(x_1) \leq f(x_2) = z_2$ $\qquad f(x_2) = f_2(x_2) = z_2$

$$\boxed{z_1 \leq z_2}$$

($\Leftarrow$) Sea $x_1 < x_2$ $\quad (a,b) \cup (c,d)$ $\quad$ "f"

Caso 1: $x_1, x_2 \in (a,b)$ $\quad (\exp \circ f_1)(x)$ es creciente

Caso 2: $x_1, x_2 \in (c,d)$ $\quad f_2$ es creciente

Caso 3: $x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (c,d)$

Analizamos Caso 3 $\quad f(x_1) = \exp \circ f_1(x_1)$ y $f(x_2) = f_2(x_2)$

como $b \leq c$ concluimos que

$$f(x_1) = (\exp \circ f_1)(x_1) \leq f_2(x_2) = f(x_2)$$

f es creciente $\quad$ monótona